

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

Кафедра «Гидравлика, гидропневмоавтоматика и тепловые процессы»

Методические указания
к выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине
«Математическое моделирование гидро- и пневмоприводов»

для студентов направления:
13.03.03 Энергетическое машиностроение

Ростов-на-Дону
2025 г.

Практическая работа № 1

«Экспериментальная идентификация одномерных детерминированных объектов при помощи метода наименьших квадратов (МНК)»

Цель работы: Получить экспериментальную статическую математическую модель одномерного детерминированного объекта методом минимума суммы квадратов отклонений.

Краткая теория: Задача идентификации состоит в представлении в аналитическом виде существующей связи между входной и выходной переменными одномерного объекта. Полагаем, что при эксперименте случайные помехи отсутствуют, и в экспериментально снятых значениях нет разброса. Для таких объектов модель наиболее часто описывается полиномом вида:

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (1.0)$$

где x – входная переменная; Y – выходная переменная; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – неизвестные коэффициенты модели, численные значения которых необходимо определить по результатам эксперимента.

Модель в виде полинома второго порядка будет иметь вид:

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (1.1)$$

Оптимальной считается модель, у которой при определенных расчетном коэффициентах $a_1 \dots a_n$ сумма квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений будет минимальной, т.е. минимизируется функционал F :

$$F = \sum_{j=1}^n (Y_{эj} - Y_{pj})^2, \quad (1.2)$$

где n – количество опытов; $Y_{эj}$ – экспериментальное (измеренное) значение выходной переменной в j -том опыте; Y_{pj} – расчетное [по ф.(1.0)] значение выходной переменной для j -того опыта.

Подставив вместо Y_p значения Y из (1.1), для модели в виде полинома второго порядка получим:

$$F = \sum_{j=1}^n (Y_{эj} - a_0 - a_1x_j - a_2x_j^2)^2 \quad (1.3)$$

Для определения значений коэффициентов модели составляют систему уравнений вида:

$$\frac{dF(a_i)}{da_i} = 0 \quad (1.4)$$

Совместное решение уравнений относительно a_i даёт такие их значения, при которых функционал (1.2) будет минимальным. Для модели второго порядка система уравнений примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(a_0)}{\partial(a_0)} = -2 \sum_{j=1}^n (Y_{\mathcal{E}j} - a_0 - a_1 x_j - a_2 x_j^2) = 0 \\ \frac{\partial F(a_1)}{\partial(a_1)} = -2 \sum_{j=1}^n (Y_{\mathcal{E}j} - a_0 - a_1 x_j - a_2 x_j^2) \cdot x_j = 0 \\ \frac{\partial F(a_2)}{\partial(a_2)} = -2 \sum_{j=1}^n (Y_{\mathcal{E}j} - a_0 - a_1 x_j - a_2 x_j^2) \cdot x_j^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} = n \cdot a_0 + a_1 \sum_{j=1}^n x_j + a_2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} \cdot x_j = a_0 \sum_{j=1}^n x_j + a_1 \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^n x_j^3 \\ \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} \cdot x_j^2 = a_0 \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_1 \sum_{j=1}^n x_j^3 + a_2 \sum_{j=1}^n x_j^4 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Для упрощения (1.6) целесообразно, проведя несложные преобразования, начало отсчёта входной переменной x помещать в середину интервала экспериментально снятых значений и пользоваться симметричными значениями x_j (одинаковыми, но различными по значению). В этом случае все суммы нечётных степеней x будут обращаться в нуль, что существенно упростит систему уравнений. Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} = n \cdot a_0 + a_2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} \cdot x_j = a_1 \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ \sum_{j=1}^n Y_{\mathcal{E}j} \cdot x_j^2 = a_0 \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^n x_j^4 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

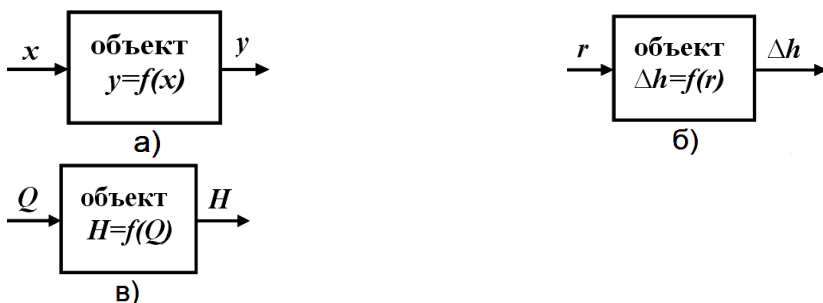
Решение относительно коэффициентов:

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_{эj} \cdot \sum_{j=1}^n x_j^4 - \sum_{j=1}^n y_{эj} \cdot x_j^2 \cdot \sum_{j=1}^n x_j^2}{n \cdot \sum_{j=1}^n x_j^4 - \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^2} \quad (1.8)$$

Рассчитав коэффициенты и подставив их в (1.1) получим уравнение регрессии.

Возможны другие уравнения для моделирования одномерных детерминированных объектов. В большинстве случаев для определения коэффициентов применяется метод наименьших квадратов.

Экспериментальная установка: В качестве объекта исследования может выбираться любая экспериментальная установка (на усмотрение преподавателя), которая может быть представлена в виде одномерного объекта (рис. 1.1а).



а – общее представление объекта исследования;

б – представление сосуда с жидкостью в виде объекта исследования;

в – представление насоса в виде объекта исследования.

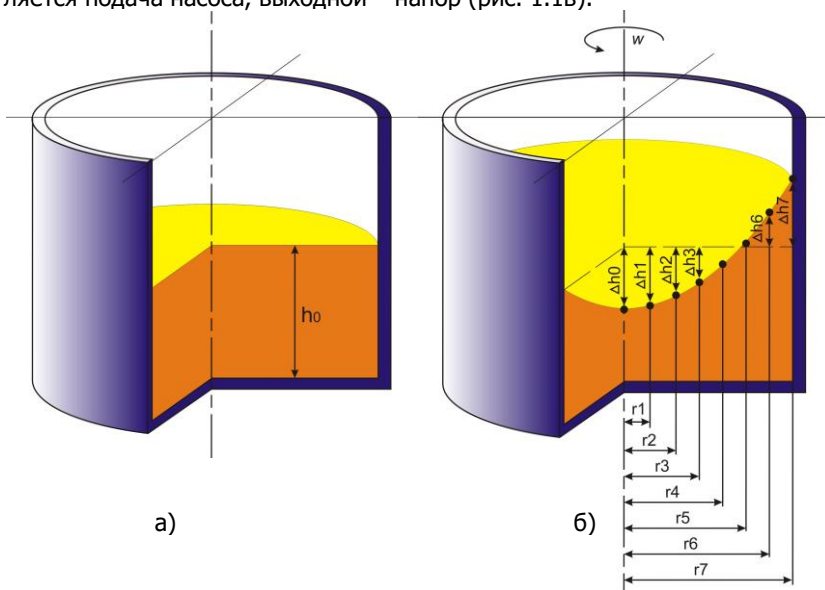
Рисунок 1.1 – Объекты исследования.

Например – вращающийся сосуд с жидкостью (рис. 1.2). При вра-

$$a_2 = \frac{n \cdot \sum_{j=1}^n y_{эj} x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_{эj} \cdot \sum_{j=1}^n x_j^2}{n \cdot \sum_{j=1}^n x_j^4 - \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^2} \quad a_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_{эj} \cdot x_j}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

щении сосуда с некоторой постоянной угловой частотой ω и жидкость принимает новое положение равновесия (рис. 1.26). Требуется получить математическую модель, описывающую отклонение свободной поверхности жидкости от положения покоя (Δh) в зависимости от радиуса вращения (r). Тогда входной переменной будет радиус вращения, выходной - отклонение (рис. 1.16).

В качестве объекта исследования допускается также использовать объекты с уже известными экспериментальными зависимостями. Например, на рисунке 1.3 приведена экспериментальная характеристика насоса. Необходимо представить зависимость напора (H), создаваемого насосом с заданным конструктивным параметром (35, 45, 65, 75 или 100), от подачи (Q) в виде зависимости $H = f(Q)$. Тогда входной переменной является подача насоса, выходной – напор (рис. 1.1в).



а – сосуд с жидкостью в состоянии покоя;

б – сосуд с жидкостью, вращающийся с угловой частотой ω .

Рисунок 1.2 – Вращающийся сосуд с жидкостью

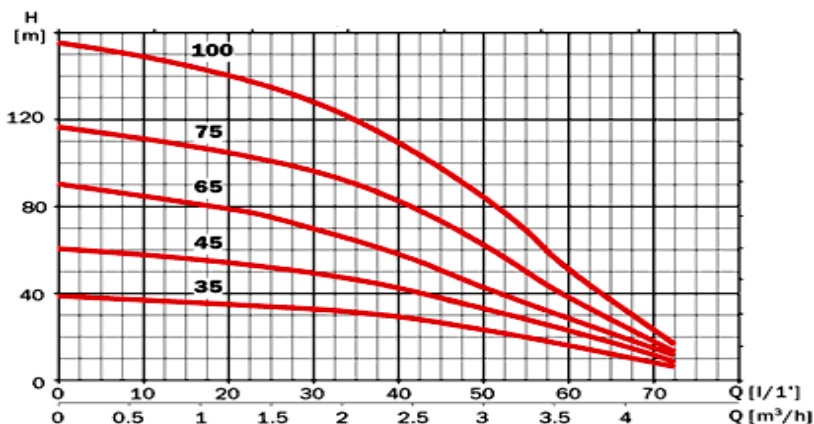


Рисунок 1.3 – Зависимость напора насосов с различным значением конструктивного параметра (35, 45, 65, 75, 100) от подачи.

Порядок выполнения работы.

1. Запишите в протокол задание и описание лабораторной установки по заданию преподавателя.

2. Письменно ответьте на вопросы для допуска к выполнению работы:

2.1 Укажите, что является входной, а что – выходной переменной;

2.2 Укажите диапазон изменения входной переменной;

2.3 Какую модель чаще всего используют при идентификации одномерных детерминированных объектов?

2.4 Для чего начало отсчёта входной переменной целесообразно помещать в середину интервала экспериментально снятых значений и пользоваться симметричными значениями?

3. Проведите эксперимент. Устанавливая заданные значения входной переменной, измерьте (или определите по графику) соответствующие значения выходной переменной. Результаты опыта занесите в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты измерений и расчётов

№	Номер опыта (i)	1	2	3	...	N
1	Исходные значения входной переменной (x_i),				...	
2	Экспериментальные значения выходной переменной (y_{xi}),				...	
3	Симметричные значения входной переменной (x_i^*),				...	

4	Расчётные значения выходной переменной, рассчитанные по симметричным значениям $Y_{pi}(x^*)$,				...	
5	Расчётные значения выходной переменной, рассчитанные по исходным значениям $Y_{pi}(x)$,				...	

4. Пересчитайте исходные значения входной переменной в симметричные по формуле:

$$x_i^* = (x_i - x_0) / k \quad (1.9)$$

где x_0 – середина интервала изменения входной переменной;
 k – некоторый постоянный коэффициент (выберите по согласованию с преподавателем).

Результаты также занесите в таблицу 1.

5. По формулам (1.8) рассчитайте значения коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 , используя при расчётах симметричные значения входной переменной.

6. По формуле (1.1) используя полученные значения коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 и симметричные значения входной переменной, рассчитайте соответствующие значения выходной переменной. Результаты занесите в таблицу 1.

7. Пересчитайте значения коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 - a_1(x_0/k) + a_2(x_0/k)^2; \\ a_1 &= a_1/k - 2a_2(x_0/k^2); \\ a_2 &= a_2/k^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

8. По формуле (1.1) используя пересчитанные значения коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 и исходные значения входной переменной, рассчитайте соответствующие значения выходной переменной. Результаты занесите в таблицу 1.

9. Запишите модель в окончательном виде.

10. В одной системе координат постройте графики расчётных и экспериментальных значений.

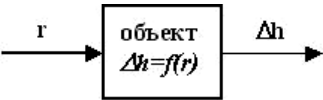
11. Напишите вывод (в выводе опишите порядок получения математической модели объекта по результатам эксперимента).

Контрольные вопросы: Что такое идентификация? Что такое одномерный объект (приведите пример)? Что такое детерминированный объект? Какая модель считается оптимальной? Какая модель наиболее часто выбирается для одномерных объектов? Что в этой модели является неизвестным? Для чего пользуются симметричными значениями входной переменной? Что можно сделать, чтобы повысить точность модели? Ка-

кова общая последовательность расчётов по методу наименьших квадратов?

Пример: Жидкость находится в цилиндрическом сосуде в состоянии покоя на уровне h_0 . При вращении сосуда с постоянной угловой скоростью ω и жидкость переходит в состояние относительного покоя и занимает новое положение равновесия. По результатам измерений необходимо получить математическую модель $\Delta h = f(r)$ в виде полинома 2-й степени, описывающую зависимость между отклонением точки на свободной поверхности жидкости от начального положения (Δh) и расстоянием от оси вращения (r).

Представим вращающийся сосуд с жидкостью в виде одномерного объекта, у которого расстояние от оси вращения является входным воздействием, а отклонение от исходного положения равновесия – выходным.



Определим при помощи измерений значения Δh , соответствующие различным значениям r . При этом, необходимо выбирать значения входной переменной через равные интервалы. Результаты измерений сведём в таблицу.

номер опыта (i)	0	1	2	3	4	5	6	7
r_i , cm	0	1	2	3	4	5	6	7
Δh_i , cm	-1,7	-1,6	-1,5	-1,2	-0,7	0	1	3,5

Порядок расчёта. Расчёт будем проводить в программе MathCAD.

1. Сформируем матрицы входных и выходных воздействий.

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad H := \begin{pmatrix} -1.7 & -1.6 & -1.5 & -1.2 & -0.7 & -0 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}$$

2. Перейдём от переменной r к переменной $r1$ таким образом, чтобы получить симметричные значения. Для этого воспользуемся, например, формулой: $r1 = (r - 3,5) / 0,5$; где 3,5 – середина интервала изменения r .

$$i := 0..7 \quad R1_{0,i} := \frac{R_{0,i} - 3.5}{0.5} \quad R1 = \begin{pmatrix} -7.0 & -5.0 & -3.0 & -1.0 & 1.0 & 3.0 & 5.0 & 7.0 \end{pmatrix}$$

3. Рассчитаем значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 по вышеприведённым формулам (1.8).

$$\begin{aligned}
 a2 &:= \frac{8 \cdot \sum_i \left[H_{0,i} \cdot (R1_{0,i})^2 \right] - \left(\sum_i H_{0,i} \right) \cdot \left[\sum_i (R1_{0,i})^2 \right]}{8 \cdot \sum_i (R1_{0,i})^4 - \left[\sum_i (R1_{0,i})^2 \right]^2} & a1 &:= \frac{\sum_i (H_{0,i} \cdot R1_{0,i})}{\sum_i (R1_{0,i})^2} \\
 a0 &:= \frac{\left(\sum_i H_{0,i} \right) \cdot \left[\sum_i (R1_{0,i})^4 \right] - \left[\sum_i \left[H_{0,i} \cdot (R1_{0,i})^2 \right] \right] \cdot \left[\sum_i (R1_{0,i})^2 \right]}{8 \cdot \left[\sum_i (R1_{0,i})^4 \right] - \left[\sum_i (R1_{0,i})^2 \right]^2} & a2 &= 0.039 \\
 & & a1 &= 0.324 \\
 & & a0 &= -1.088
 \end{aligned}$$

Таким образом, зависимость Δh от переменной $r1$ будет иметь вид:

$$\Delta h_p(r1) = -1,088 + 0,324 \cdot r1 + 0,039 \cdot r1^2 \quad (1.8)$$

4. Рассчитаем значения $\Delta h_{pi}(r1)$:

$$\begin{aligned}
 h(r) &:= a0 + a1 \cdot r + a2 \cdot r^2 & H1_{0,i} &:= h(R1_{0,i}) \\
 H1 &= (-1.5 \quad -1.7 \quad -1.7 \quad -1.4 \quad -0.7 \quad 0.2 \quad 1.5 \quad 3.1)
 \end{aligned}$$

5. Перейдём обратно от переменной $r1$ к переменной r по формулам (1.10):

$$\Delta h_p(r) = -1,087 + 0,324 \cdot (r - 3,5) / 0,5 + 0,039 \cdot [(r - 3,5) / 0,5]^2 \quad (1.9)$$

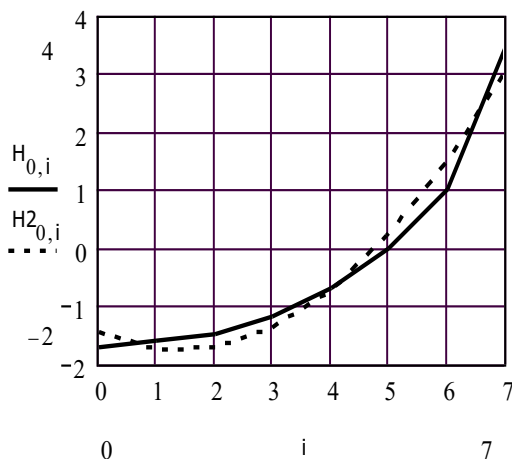
Раскрыв скобки, получим:

$$\Delta h_p(r) = -1,458 - 0,436 \cdot r + 0,155 \cdot r^2 \quad (1.10)$$

Рассчитаем значения $\Delta h_{pi}(r)$:

$$\begin{aligned}
 a0 &:= a0 - a1 \cdot \frac{3.5}{0.5} + a2 \cdot \frac{3.5^2}{0.5^2} & a1 &:= \frac{a1}{0.5} - a2 \cdot \frac{2 \cdot 3.5}{0.5^2} & a2 &:= \frac{a2}{0.5^2} \\
 a0 &= -1.458 & a1 &= -0.436 & a2 &= 0.155 & h(r) &:= a0 + a1 \cdot r + a2 \cdot r^2 \\
 H2_{0,i} &:= h(R_{0,i}) & H2 &= (-1.5 \quad -1.7 \quad -1.7 \quad -1.4 \quad -0.7 \quad 0.2 \quad 1.5 \quad 3.1)
 \end{aligned}$$

6. Построим графики расчётных и экспериментальных значений:



Практическая работа № 2

«Экспериментальная идентификация одномерных детерминированных объектов при помощи метода наименьших квадратов в матричной форме»

Цель работы: Получить экспериментальную статическую математическую модель одномерного детерминированного объекта при помощи метода наименьших квадратов в матричной форме. Выяснить влияние порядка модели и количества опытов на точность полученной модели.

Краткая теория: Система уравнений (1.6), представленная в предыдущей лабораторной работе, может быть легко решена и при большом количестве неизвестных коэффициентов. Для этого используют ЭВМ и специальное программное обеспечение (MathCad, MATLAB) и решают систему в матричном виде.

Матрицей называется прямоугольная таблица действительных чисел, упорядоченных по строкам и столбцам:

$$Z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mn} \end{vmatrix}$$

Размер матрицы обозначается как $m \times n$, где m – количество строк, n – количество столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называют элементами матрицы и обозначаются z_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых этот элемент находится.

Произведением двух матриц Z и V размером $m \times n$ и $n \times k$ называется матрица W размером $m \times k$, элементы которой равны:

$$w_{i,j} = \sum_{q=1}^n z_{i,q} \cdot v_{q,j} \quad \text{где } i=1...m; j=1...k$$

Тогда систему из n уравнений с n неизвестными $v_1 \dots v_n$ вида:

$$\begin{cases} z_{11}^v v_1 + z_{12}^v v_2 + \dots + z_{1n}^v v_n = w_1 \\ z_{21}^v v_1 + z_{22}^v v_2 + \dots + z_{2n}^v v_n = w_2 \\ \text{*****} \\ z_{n1}^v v_1 + z_{n2}^v v_2 + \dots + z_{nn}^v v_n = w_n \end{cases}$$

можно записать в матричном виде: $\mathbf{Z} \times \mathbf{V} = \mathbf{W}$, а матрицы имеют вид:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$$

По аналогии систему (1.6) можно привести к матричной форме:

$$X \times A = Y, \quad (2.1)$$

где X – матрица входных воздействий размером $n \times n$; A – матрица-столбец искомых коэффициентов размером $n \times 1$; Y – матрица выходных воздействий размером $n \times 1$. Здесь n – количество неизвестных коэффициентов математической модели.

Элементы матриц X и Y определяются по формулам:

$$x_{k,p} = \sum_{i=1}^m x_i^{k+p}; \quad y_k = \sum_{i=1}^m y_i \cdot x_i^k, \quad (2.2)$$

где x_i , y_i – значения входной и выходной переменной, соответственно, в i -том опыте; m – количество опытов.

Тогда матрицу искоемых коэффициентов можно найти по формуле:

$$A = X^{-1} * Y \quad (2.3)$$

Экспериментальная установка: В качестве объекта исследования может быть любая экспериментальная установка, которая может быть представлена в виде одномерного объекта (рис. 1.1а). Могут быть использованы те же установки, что и в предыдущей работе.

Порядок выполнения работы.

1. Запишите в протокол задание и описание лабораторной установки по заданию преподавателя.

2. Письменно ответьте на вопрос для допуска к выполнению работы:

Напишите, как будут выглядеть матрицы, A , X , Y в формуле (2.1), если используется модель в виде полинома 3-го порядка (4 неизвестных коэффициента) при 11-ти опытах.

3. Проведите эксперимент. Устанавливая заданные значения входной переменной, измерьте (или определите по графику) соответствующие значения выходной переменной. Для выполнения цели лабораторной работы количество опытов должно быть не меньше 11. Результаты опыта занесите в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты измерений и расчётов

Номер опыта	1	2	3	...	11	F
Исходные значения входной переменной (x_i)				...		---
Экспериментальные значения выходной переменной ($Y_{эi}$)				...		---
Значения выходной переменной, рассчитанные по модели 2-го порядка, определённой по 6-ти опытам (y_{1pi})				...		

Значения выходной переменной, рассчитанные по модели 2-го порядка, определённой по 11-ти опытам (y_{2pi})				...		
Значения выходной переменной, рассчитанные по модели 3-го порядка, определённой по 6-ти опытам (y_{3pi})				...		
Значения выходной переменной, рассчитанные по модели 3-го порядка, определённой по 11-ти опытам (y_{1pi})				...		

4. Рассчитайте по формулам (2.2) матрицы X и Y для модели **2-го** порядка по **6-ти** опытам. В этом случае $m = 6$, $n = 3$. При расчёте используйте данные 1-го, 3-го, 5-го, 7-го, 9-го, 11-го опытов.

5. По формуле (2.3) определите матрицу неизвестных коэффициентов.

6. По формуле (1.1) используя полученные значения коэффициентов, рассчитайте соответствующие значения выходной переменной для всех 11-ти опытов. Результаты занесите в таблицу 2.1.

7. По формуле (1.3) рассчитайте значение функционала F . Результат занесите в таблицу 1.

8. В одной системе координат постройте графики расчётных и экспериментальных значений и запишите модель в окончательном виде.

9. Повторите пункты 4...9 для модели **2-го** порядка, определённой по **11-ти** опытам (в этом случае для расчёта используйте данные всех 11-ти опытов); для модели **3-го** порядка, определённой по **6-ти** опытам; модели **3-го** порядка, определённой по **11-ти** опытам. Результаты занесите в таблицу 2.1.

10. Напишите вывод (ответьте на вопрос: Какая из полученных моделей является наиболее точной? Докажите).

Контрольные вопросы: Каков порядок получения математической модели объекта по результатам эксперимента? Каким образом необходимо выбирать входные воздействия? В каком случае используют МНК в матричном виде? Что такое матрица, элемент матрицы, произведение двух матриц? Как в матричном виде записать систему из m уравнений с m неизвестными? Можно ли пользоваться МНК в матричной форме для других видов моделей (например, $y(x) = \ln(a_0 + a_1x + a_2x^2)$; $y(x) = 1/(a_0 + a_1x + a_2x^2)$)? Объясните, почему? Как изменится размер матриц в формуле (2.4) при изменении порядка полинома, при изменении количества опытов?

Пример: Жидкость находится в цилиндрическом сосуде в состоянии покоя на уровне h_0 . При вращении сосуда с постоянной угловой скоростью ω жидкость переходит в состояние относительного покоя и занимает новое положение равновесия. По результатам измерений необходимо получить математические модели $\Delta h = f(r)$ в виде полиномов 2-й и 3-й степени по результатам 6-ти и 11-ти опытов, описывающие зависимость между отклонением точки на свободной поверхности жидкости от начального положения ($\Delta h = h - h_0$) и расстоянием от оси вращения (r). Определить по значению функционала F , какая из моделей является наиболее оптимальной.

Определим при помощи измерений значения Δh , соответствующие различным значениям r . При этом необходимо выбирать значения входной переменной r через равные интервалы. Результаты измерений сведены в таблицу.

$r_i, \text{ мм}$	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
$\Delta h_{iB}, \text{ мм}$	-19	-18	-17	-15	-13	-10	-6	0	8	9	5

Порядок расчёта. Расчёт будем проводить в программе MathCad.

1. Сформируем матрицы входных и выходных воздействий для получения математической модели в виде полинома 2-й степени по результатам 6-ти опытов:

$$\underline{R} := (0 \ 14 \ 28 \ 42 \ 56 \ 70) \quad \underline{H} := (-19 \ -17 \ -13 \ -6 \ 8 \ 45)$$

$$\begin{matrix} i := 0..5 & k := 0..2 & p := 0..2 \\ X_{k,p} := \sum_i (R_{0,i})^{k+p} & Y_k := \sum_i [H_{0,i} \cdot (R_{0,i})^k] \end{matrix}$$

2. Сформируем матрицы X и Y :

3. Найдём матрицу неизвестных коэффициентов:

4. Математическая модель в виде полинома 2-й степени по результатам 6-ти опытов будет иметь вид:

$$\Delta h(r) = -16,25 - 0,551 \cdot r + 0,02 \cdot r^2 \quad (2.7)$$

Рассчитаем значения Δh_{pi} для значений входной переменной r_i , при ко-

$$\underline{A} := X^{-1} \cdot Y \quad \underline{A}^T = (-16.25 \ -0.551 \ 0.02)$$

торых производились измерения (таб.):

$R1 := (0 \ 7 \ 14 \ 21 \ 28 \ 35 \ 42 \ 49 \ 56 \ 63 \ 70)$ $i1 := 0..10$

$$h(r) := \sum_k (A_k \cdot r^k) \quad H1_{0,i1} := h(R1_{0,i1})$$

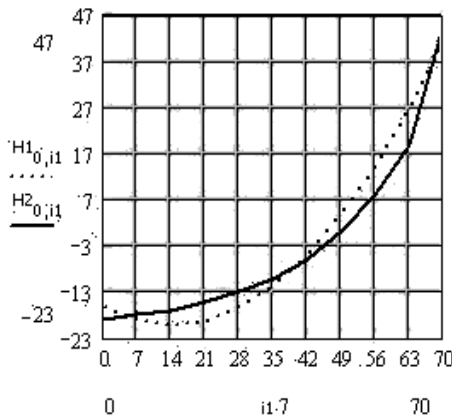
$H1 = (-16.3 \ -19.1 \ -20.1 \ -19.2 \ -16.3 \ -11.5 \ -4.8 \ 3.8 \ 14.3 \ 26.8 \ 41.2)$

5. Рассчитаем значение функционала F:

$$F := \sum_{i1} (H1_{0,i1} - H2_{0,i1})^2 \quad F = 180.708$$

6. Построим графики расчётных и экспериментальных значений:

$H2 := (-19 \ -18 \ -17 \ -15 \ -13 \ -10 \ -6 \ 0 \ 8 \ 19 \ 45)$



7. Для того, чтобы получить модель в виде полинома 3-й степени, необходимо в п.2 вместо

$k := 0..2$ $p := 0..2$

ввести

$k := 0..3$ $p := 0..3$

8. Для того, чтобы получить модель по 11-ти опытам, необходимо в п.1 заменить матрицы R и H размера $[1 \times 6]$ матрицами размера $[1 \times 11]$ и в п.2 вместо $i := 0..5$ ввести $i := 0..10$.

Практическая работа № 3

«Экспериментальная идентификация многомерных детерминированных объектов методом планирования эксперимента»

Цель работы: Получить экспериментальную статическую математическую модель многомерного детерминированного объекта методом планирования эксперимента.

Краткая теория. Получение модели многомерных объектов по результатам эксперимента осложняется, прежде всего, тем, что на исследуемый параметр влияет много факторов, которые можно разделить на существенные и несущественные. Поэтому трудно определить число входов объекта, подлежащих учёту. В отличие от одномерных объектов затруднена геометрическая интерпретация моделей.

При значительном числе входных воздействий x_i модель может быть нелинейной и иметь сложный рельеф с вершинами, впадинами, гребнями. Поиск экстремальных точек вершин и впадин на этой поверхности путём изменения величин x_i составляет содержание оптимального управления. Обычно такая модель называется целевой функцией или поверхностью отклика, а оптимальное управление обеспечивает работу технологического оборудования в области экстремального значения критерия качества. Получить по данным эксперимента модель объекта управления, точно воспроизводящую поверхность отклика, весьма сложно. Поэтому на практике часто ограничиваются её линейным или квадратичным приближением, выбирая диапазон изменения переменной в ограниченной области.

Границы области желательно выбрать так, чтобы в неё попал экстремум и предельно допустимые значения y и x_i .

Такой подход может дать в большей степени качественное, нежели количественное решение. Оно сводится к оценке влияния различных факторов на исследуемую переменную y и даёт возможность пренебречь некоторыми из них.

Метод, позволяющий, получить многомерную модель объекта на основе эксперимента получил название факторного анализа (метод планирования эксперимента). Применительно к детерминированному объекту метод заключается в следующем:

1. Выбирают факторы x_i , оказывающие существенное влияние на выходную переменную y . Определяют область изменения x_i .
2. Составляют план эксперимента. Под планом эксперимента понимают выбор значений x_i , при которых будут проводиться опыты, и последовательность изменения x_i .
3. Принудительно изменяют x_i в выбранных пределах и сочетаниях, определяемых планом эксперимента, фиксируют значения y .
4. Рассчитывают коэффициенты уравнения модели.

Основным условием проведения эксперимента является выбор независимых друг от друга входных величин x_i .

При постановке задачи выбирается центр области варьирования с координатами y_0, x_{10}, x_{20} и т.д. и устанавливаются границы области варьирования. По возможности область выбирается меньшей, что повышает точность моделей. План проведения эксперимента и методика расчета коэффициентов зависят от выбранного типа модели.

Для описания участка поверхности отклика нелинейного многомерного объекта используются полиномы второго порядка вида:

$$Y(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 \quad (3.1)$$

В процессе эксперимента каждому входному воздействию x_i задаются различные уровни (значения). Если во время эксперимента перебираются все возможные неповторяющиеся сочетания уровней для n независимых управляющих воздействий (факторов), то он называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). При одинаковом числе уровней – D , число точек спектра плана ПФЭ равно

$$N = D^n \quad (3.2)$$

Для определения значений коэффициентов можно воспользоваться методом минимума суммы квадратов. Более просто получить результат, если считать, что минимум отклонений имеет место при совпадении результатов расчётной модели и эксперимента в точках проведения опытов. В этом случае коэффициенты b_i должны удовлетворять системе уравнений вида:

$$Y = X * B, \quad (3.3)$$

где Y – матрица-столбец экспериментальных значений с числом элементов N , равным числу опытов; B – матрица – столбец коэффициентов b_i с числом элементов, равным числу членов полинома m (для полинома второго порядка $m = (n+1)*(n+2)/2$); X – матрица входных воздействий размером $N \times m$.

Матрицу неизвестных коэффициентов B можно найти по формуле:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y = C^{-1} X^T Y \quad (3.4)$$

Можно подобрать значения x_i таким образом, что эта система разобьётся на m независимых уравнений, каждое из которых будет включать лишь один неизвестный коэффициент b_i . Для этого переходят к относительным величинам входных переменных:

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\Delta x_i}, \quad (3.5)$$

где $\Delta x_i = (x_{i \max} - x_{i \min})/2$; $x_{i0} = (x_{i \max} + x_{i \min})/2$; а x_i^2 заменяются центрированными квадратичными функциями $(x_i^*)^2$.

Переход к относительным значениям также позволяет пренебречь малозначащими коэффициентами.

Тогда матрица X будет иметь вид:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1x_2 & \dots & x_{n-1}x_n & (x_1^*)^2 & (x_2^*)^2 & \dots & (x_n^*)^2 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \\
1 & -1 & 1 & \dots & -1 & -1 & \dots & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \\
1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \\
1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2-\lambda & -\lambda & \dots & -\lambda \\
1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2-\lambda & -\lambda & \dots & -\lambda \\
1 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & a^2-\lambda & \dots & -\lambda \\
1 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & a^2-\lambda & \dots & -\lambda \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 & -\lambda & -\lambda & \dots & a^2-\lambda \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & -\lambda & \dots & -\lambda
\end{array}$$

где x_0 – фиктивная переменная, вводимая для унификации членов модели и всегда равная единице; a и λ – коэффициенты, значения которых зависят от числа входных переменных и выбираются из справочников по планированию эксперимента.

В этом случае коэффициенты b_i определяются по формулам:

где k – коэффициенты, которые также определяются по справочнику.

Для полинома 2-й степени, описывающего двумерный объект,

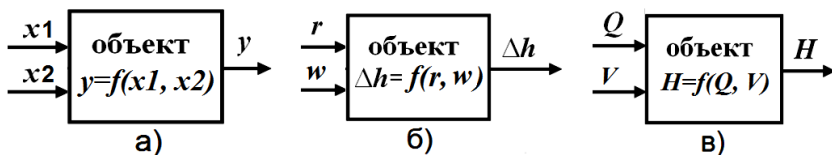
$$\begin{aligned}
b_i &= k1 \sum_{g=1}^N (x_i) g y_g; & b_{ij} &= k2 \sum_{g=1}^N (x_i x_j) g y_g; \\
b_{ii} &= k3 \sum_{g=1}^N (x_i^2) g y_g; & b_0 &= k0 \sum_{g=1}^N y_g - \lambda \sum_{i=1}^n b_{ii}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$a=1$; $\lambda=0,66667$; $k0=0,11111$; $k1=0,16667$; $k2=0,25$; $k3=0,5$.

Экспериментальная установка: В качестве объекта исследования может быть любая экспериментальная установка, которая может быть представлена в виде многомерного (в частности – двухмерного) объекта (рис. 3.1а).

Могут быть использованы те же установки, что и в предыдущих работах (рис 1.2, 1.3).

Например, для вращающегося сосуда с жидкостью требуется получить математическую модель, описывающую отклонение свободной поверхности жидкости от положения покоя (Δh) в зависимости от радиуса вращения (r) и угловой частоты вращения (ω). Тогда входными переменными будут радиус вращения и угловая частота, выходной – отклонение (рис. 3.16).



а – общее представление двухмерного объекта исследования;

б – представление вращающегося сосуда с жидкостью в виде двухмерно-го объекта исследования;

в – представление насоса в виде двухмерного объекта исследования.

Рисунок 3.1 – Двухмерные объекты исследования.

Для насоса необходимо представить зависимость напора (Н) от подачи (Q) и конструктивного параметра ($V = 35, 45, 65, 75$ или 100) в виде функции $H = f(Q, V)$. Тогда входными переменными являются подача и конструктивный параметр, выходной – напор (рис. 3.1в).

Порядок выполнения работы.

1. Запишите в протокол задание и описание лабораторной установки по заданию преподавателя.

2. Письменно ответьте на вопросы для допуска к выполнению лабораторной работы:

2.1 Назовите входные и выходные переменные объекта исследования.

2.2 Для чего переходят от абсолютных значений входных переменных к относительным?

2.3 Как будет выглядеть матрица входных переменных в относительных значениях для модели в виде полинома второго порядка для двухмерного объекта?

3. По заданию преподавателя запишите диапазоны изменения значений входных переменных ($x1_{max}, x1_{min}, x2_{max}, x2_{min}$).

4. Определите $\Delta x1, x1_0, \Delta x2, x2_0$ по формулам:

$$\Delta x1 = (x1_{max} - x1_{min})/2; \quad x1_0 = (x1_{max} - x1_{min})/2;$$

$$\Delta x2 = (x2_{max} - x2_{min})/2; \quad x2_0 = (x2_{max} - x2_{min})/2.$$

5. Из формулы (3.5) определите абсолютные значения входных переменных $x1$ и $x2$ при заданных относительных значениях входных переменных $x1^*$ и $x2^*$. Результаты занесите в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты экспериментов и расчётов

$x1^*$	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0
--------	----	---	----	---	----	---	---	---	---

x_2^*	-1	-1	1	1	0	0	-1	1	0
x_1 ,									
x_2 ,									
Y_{Σ}									
Y_P									

6. Проведите эксперимент. Устанавливая заданные значения входных переменных, определите значения выходной переменной (Y_{Σ}). Результаты занесите в таблицу 3.1.

7. Рассчитайте по формулам (3.6) значения коэффициентов $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_{11}, b_{22}$.

8. Запишите математическую модель объекта, заменив в формуле (3.1) абсолютные значения входных переменных их относительными значениями по формуле (3.5).

9. По полученной модели рассчитайте значения выходной переменной (Y_P) при заданных значениях входных переменных. Результаты занесите в таблицу 3.1.

10. Постройте в одной системе координат графики:

$y=f(x_1)$ при $x_2=x_{2min}$; $y=f(x_1)$ при $x_2=x_{20}$; $y=f(x_1)$ при $x_2=x_{2max}$.

11. Напишите вывод (Ответьте на вопросы: Какая модель считается наиболее точной (оптимальной) при использовании метода планирования эксперимента? В чём отличие метода планирования эксперимента от метода наименьших квадратов?).

Контрольные вопросы: Что такое многомерный объект? Чем осложняется получение многомерной модели объекта по результатам эксперимента? Что такое оптимальное управление? Каковы этапы метода планирования эксперимента? Что такое план эксперимента? Какой моделью задаются при методе планирования эксперимента? Какой вид будет иметь модель в виде полинома второго порядка для объекта с тремя входными переменными? Что такое полнофакторный эксперимент? Что даёт переход от абсолютных значений входных переменных к относительным? По каким формулам он выполняется?

Пример: Жидкость находится в цилиндрическом сосуде в состоянии покоя на уровне h_0 . При вращении сосуда с постоянной угловой скоростью ω жидкость переходит в состояние относительного покоя и занимает новое положение равновесия, которое зависит от скорости враще-

ния w . По результатам измерений необходимо получить математическую модель $\Delta h = f(r, w)$ в виде полинома 2-го порядка, описывающего зависимость между отклонением точки на свободной поверхности жидкости от начального положения (Δh) и расстоянием от оси вращения (r) и скоростью вращения (w). Диапазон изменения входных переменных: $r = 0 \dots 7$ см; $w = 120 \dots 160$ об/мин.

Порядок расчёта:

1. Перейдём от абсолютных значений переменных r и w к относительным – r^* и w^* по формуле (3.5) (где $r_0 = 3,5$ см; $\Delta r = 3,5$ см; $w_0 = 140$ об/мин; $\Delta w = 20$ об/мин). Тогда между переменными установится следующее соответствие:

r , см	r^*	w , об/мин	w^*
0	-1	120	-1
3,5	0	140	0
7	1	160	1

2. Если для двумерного объекта математическая модель задана формулой (3.1), то необходимо провести 9 опытов (измерений) при различных сочетаниях значений r и w . Результаты опытов приведены в таблице:

r^*	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0
w^*	-1	-1	1	1	0	0	-1	1	0
r , см	0	7	0	7	0	7	3,5	3,5	3,5
w , об/мин	120	120	160	160	140	140	120	140	160
Δh , см	-1,2	1,4	-2,8	4,6	-2	2,6	-0,7	-1,7	-1,3

3. Расчёт значений коэффициентов b будем проводить в программе MathCad. Сформируем матрицы входных и выходных воздействий:

$$\begin{array}{l}
 a := 1 \quad \lambda := 0.66667 \\
 RW := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -a & 0 & 0 & a^2-\lambda & -\lambda \\ 1 & a & 0 & 0 & a^2-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & -a & 0 & -\lambda & a^2-\lambda \\ 1 & 0 & a & 0 & -\lambda & a^2-\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \quad H := \begin{pmatrix} -1.2 \\ 1.4 \\ -2.8 \\ 4.6 \\ -2 \\ 2.6 \\ -0.7 \\ -1.7 \\ -1.3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

4. Рассчитаем по формулам (3.6) значения коэффициентов b:

$$\begin{array}{l}
 k0 := 0.11111 \quad k1 := 0.16667 \quad k2 := 0.24 \quad k3 := 0.5 \quad i := 0..8 \\
 b2 := k1 \cdot \sum_i (RW_{i,2} \cdot H_i) \quad b1 := k1 \cdot \sum_i (RW_{i,1} \cdot H_i) \quad b12 := k2 \cdot \sum_i (RW_{i,3} \cdot H_i) \\
 b11 := k3 \cdot \sum_i (RW_{i,4} \cdot H_i) \quad b22 := k3 \cdot \sum_i (RW_{i,5} \cdot H_i) \\
 b0 := k0 \cdot \sum_i H_i - \lambda \cdot (b11 + b22) \quad b0 = -1.344 \quad b1 = 2.433 \\
 b2 = 0.1 \quad b12 = 1.152 \quad b11 = 1.667 \quad b22 = 0.167
 \end{array}$$

5. Перейдя от относительных значений входных переменных обратно к абсолютным, получим уравнение поверхности отклика:

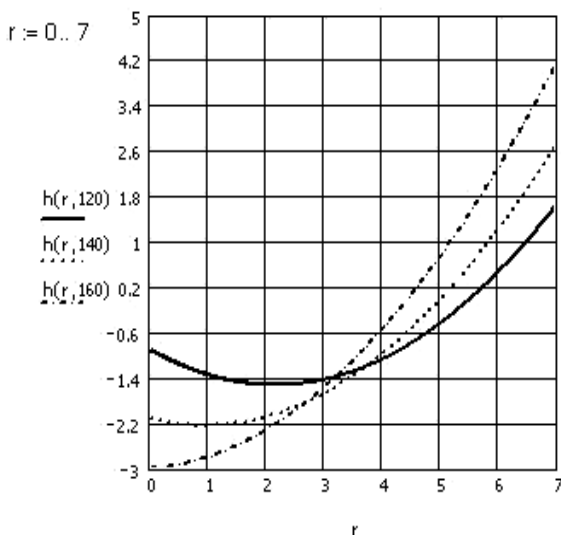
$$\begin{aligned}
 \Delta h(r, w) = & -1,3 + 2,4 \left(\frac{r-3,5}{3,5} \right) + 0,1 \left(\frac{w-140}{20} \right) + 1,15 \left(\frac{r-3,5}{3,5} \right) \left(\frac{w-140}{20} \right) + \\
 & + 1,67 \left(\frac{r-3,5}{3,5} \right)^2 + 0,17 \left(\frac{w-140}{20} \right)^2
 \end{aligned}$$

6. Рассчитаем значения выходной переменной Δh при заданных значениях входных переменных r и w :

$$h(r, w) = b_0 + b_1 \cdot \left(\frac{r-3,5}{3,5}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{w-140}{20}\right) + b_{12} \cdot \left(\frac{r-3,5}{3,5}\right) \cdot \left(\frac{w-140}{20}\right) + b_{11} \cdot \left(\frac{r-3,5}{3,5}\right)^2 + b_{22} \cdot \left(\frac{w-140}{20}\right)^2$$

$h(0, 120) = -0.892$	$h(7, 160) = 4.174$	$h(3.5, 120) = -1.278$
$h(7, 120) = 1.67$	$h(0, 140) = -2.111$	$h(3.5, 160) = -1.078$
$h(0, 160) = -2.996$	$h(7, 140) = 2.756$	$h(3.5, 140) = -1.344$

7. Построим расчётные графики:



Практическая работа № 4

«Динамическая идентификация одномерных детерминированных объектов»

Цель работы: Получить динамическую модель объекта по результатам пассивного эксперимента методом Калмана.

Краткая теория. Динамическая модель объекта связывает выходную величину с входным воздействием в процессе их изменения во времени. Для динамической идентификации используют активный и пассивный эксперимент. Активный эксперимент основан на задании объекту специально сформированных управляющих воздействий (скачкообразных, гармонических, импульсных). По реакции объекта на эти воздействия устанавливают его динамические свойства. Не для всех объектов может быть поставлен активный эксперимент. В этом случае применяется пассивный эксперимент. Его сущность заключается в фиксации входных и выходных переменных в нормальных эксплуатационных режимах.

Одним из методов динамической идентификации является метод Калмана:

- В процессе эксплуатации через равные промежутки времени записывают значения входных и выходных параметров.
- Задаются моделью в виде разностного уравнения, которое является аналогом дифференциального уравнения:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_k x_{n-k}, \quad (4.1)$$

где y_n, x_n – значения выходной и входной переменных соответственно в текущий момент времени; $y_{n-1}, \dots, y_{n-k}, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ – значения выходной и входной переменных в предыдущие моменты времени соответственно.

- Методом минимума суммы квадратов отклонений определяют коэффициенты разностного уравнения.

Сравнивают расчётные динамические характеристики с экспериментальными. При больших отклонениях задаются разностным уравнением более высокого порядка и повторяют расчёт.

Экспериментальная установка: В качестве объекта исследования может быть любая экспериментальная установка, которая может быть представлена в виде одномерного объекта, у которого возможно проследить изменение выходной переменной во времени.

Например, модель теплообменного аппарата (рис. 4.1), состоящего из прямоугольного короба воздуховода (1) и вертикального трубного пучка с шахматным расположением труб. В центре трубного пучка установлен калориметр (2) – тонкостенная латунная трубка с внутренним электронагревателем.

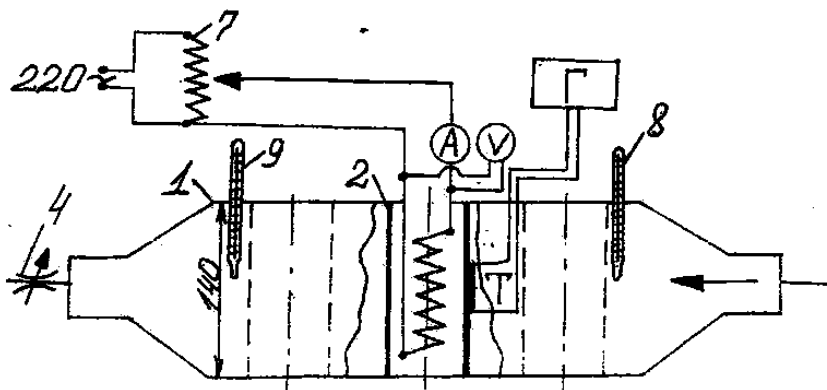


Рисунок 4.1 – Модель теплообменного аппарата

Температура наружной поверхности калориметра измеряется термомпарой, показания которой определяются гальванометром со шкалой, отградуированной в °С. Воздух продувается через короб (1) центробежным вентилятором.

При включении электронагревателя (подаче скачкообразного воздействия) температура стенок калориметра начинает увеличиваться. Необходимо получить модель в виде разностного уравнения первого порядка, описывающую изменение температуры во времени.

В качестве объекта исследования допускается также использовать объекты с уже известными экспериментальными зависимостями. Например, на рисунке 4.2 приведён переходный процесс перемещения регулирующего элемента пропорционального регулятора расхода. Необходимо получить модель в виде разностного уравнения первого порядка, описывающую изменение положения регулирующего элемента во времени.

Порядок выполнения работы.

1. Запишите в протокол задание и описание лабораторной установки по заданию преподавателя.

2. Письменно ответьте на вопрос для допуска к выполнению лабораторной работы: Опишите порядок получения динамической модели объекта методом Калмана.

3. Проведите эксперимент, задаваясь для начала простейшей моделью:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + b_0 \quad (4.2)$$

Включите установку (подайте скачкообразное воздействие) и через равные интервалы времени зафиксируйте значения выходной переменной $y_{э n}$ и $y_{э n-1}$. Результаты занесите в таблицу 4.1.

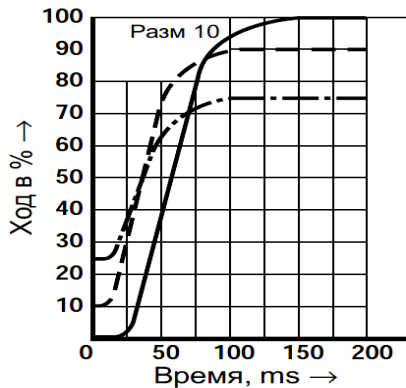


Рисунок 4.2 – Переходной процесс перемещения регулирующего элемента пропорционального регулятора расхода

Таблица 4.1 Экспериментальные и расчётные значения

$t,$	0								
$Y_{э n},$									
$Y_{э n-1},$	-								
$Y_{р n},$	-								

4. Определите значения коэффициентов a_1 и b_0 по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(m \sum_{i=1}^m Y_n Y_{n-1} - \sum_{i=1}^m Y_{n-1} \sum_{i=1}^m Y_n)}{m \sum_{i=1}^m Y_{n-1}^2 - (\sum_{i=1}^m Y_{n-1})^2}; \\
 b_0 &= \frac{(\sum_{i=1}^m Y_n \sum_{i=1}^m Y_{n-1}^2 - \sum_{i=1}^m Y_{n-1} \sum_{i=1}^m Y_n Y_{n-1})}{m \sum_{i=1}^m Y_{n-1}^2 - (\sum_{i=1}^m Y_{n-1})^2},
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

где m – количество опытов, исключая измерение в начальный момент времени (при $t=0$).

5. По формуле (4.2) определите расчётные значения выходной переменной $y_{p,n}$. Результаты занесите в таблицу 4.1.

6. В одной системе координат постройте экспериментальный и расчётный график изменения выходной переменной во времени.

7. Напишите вывод (Ответьте на вопрос: В чём отличие между динамической и статической идентификацией?).

Контрольные вопросы: Что такое динамическая модель? Что такое активный эксперимент? Какие управляющие воздействия используются при активном эксперименте? Что такое пассивный эксперимент? Какой моделью задаются при динамической идентификации? Каков порядок проведения эксперимента по методу Калмана?

Пример: Для анализа температурного режима мощного редуктора фиксировалось нарастание температуры масла в картере при приложении минимальной нагрузки. Результаты измерений приведены в таблице. Получить динамическую модель объекта и определить постоянную нагрева редуктора.

t, ч	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta_{э n}, ^\circ\text{C}$	19	44	57	64	73	78	81	87	88	89	90

Порядок расчёта:

1. Сформируем матрицы значений температуры в текущие (θ_n) и в предыдущие (θ_{n-1}) моменты времени:

$$Q := \begin{pmatrix} 44 & 57 & 64 & 73 & 78 & 81 & 87 & 88 & 89 & 90 \end{pmatrix}$$

$$Q1 := \begin{pmatrix} 19 & 44 & 57 & 64 & 73 & 78 & 81 & 87 & 88 & 89 \end{pmatrix}$$

2. Определим по формулам (4.3) значения коэффициентов a_1 и b_0 :

$$\underline{m} := 10 \quad i := 0..m-1$$

$$b := \frac{\left[\sum_i (Q1_{0,i})^2 \right] \cdot \left(\sum_i Q_{0,i} \right) - \left(\sum_i Q1_{0,i} \right) \cdot \left[\sum_i (Q_{0,i} \cdot Q1_{0,i}) \right]}{m \cdot \left[\sum_i (Q1_{0,i})^2 \right] - \left(\sum_i Q1_{0,i} \right)^2} \quad b = 28.6$$

$$a := \frac{m \cdot \left[\sum_i (Q_{0,i} \cdot Q1_{0,i}) \right] - \left(\sum_i Q1_{0,i} \right) \cdot \left(\sum_i Q_{0,i} \right)}{m \cdot \left[\sum_i (Q1_{0,i})^2 \right] - \left(\sum_i Q1_{0,i} \right)^2} \quad a = 0.7$$

3. Определим расчётные значения температуры по модели (4.2):

$$Q_{p,0} := 15 \quad Q_{p,i+1} := a \cdot Q_{p,i} + b$$

$$Q_p = (19 \ 41.6 \ 57 \ 67.6 \ 74.8 \ 79.8 \ 83.1 \ 85.5 \ 87 \ 88.1 \ 88.9)$$

4. Построим расчётные и экспериментальные графики:

$$i := 0..m \quad Q := (19 \ 44 \ 57 \ 64 \ 73 \ 78 \ 81 \ 87 \ 88 \ 89 \ 90)$$

